Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 235 : Problèmes d'interversion en analyse
— 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables
— 239 : Fonction définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Preuve:

Étape 1 : Justifions la convergence de cette intégrale

On a $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ et pour $X \geq 1$, on a en intégrant par parties,

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\frac{\cos(t)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$ donc l'intégrale entre 1 et X admet une limite finie lorsque $X \to +\infty$ d'où l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

Étape 2 : Étudions la transformée de Laplace de sinc

Introduisons $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ la transformée de Laplace de sinc,
F est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ car pour $x > 0$, on a $e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$ donc $t \mapsto e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}$ est intégrable pour $x > 0$.
$F(x)$ est définie pour $x > 0$ et est définie pour $x = 0$ d'après précédemment.
Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$,
Soit $f : (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}$, f est de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ avec $\partial_x f(x,t) = -e^{-xt}\sin(t)$.
Soit $a > 0$, pour tout $x \geq a$ et $t > 0$, $|\partial_x f(x,t)| = e^{-xt}|\sin(t)| \leq e^{-at}$ et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur

$\mathbb{R}^+$, donc par théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t &= -\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, F(x) = c - \arctan(x)$. Or, comme

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On a donc $c = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.
Pour montrer que $F(0) = 0$, il faut étudier la continuité de F en 0.

Étape 3 : Montrons la continuité de F en 0

Remarque 1. Il n'est pas possible d'utiliser le théorème de continuité sous le signe somme en l'état car $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Posons } \begin{cases} F_1(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ F_1(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \end{cases} \text{ de sorte que } F = F_1 + F_2.$$

La fonction F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ car on dispose de la domination $|\partial_x f(x,t)| = e^{-xt}|\sin(t)| \leq 1$ et la constante 1 est intégrable sur $]0, 1]$.

Montrons la continuité de $F_2 = \mathrm{Im}G$ avec $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
Pour $X \geq 1$,

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i-x}\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^X + \frac{1}{i-x}\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable et

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, $(x,t) \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times [1, +\infty[$ et on dispose de la domination $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ donc G est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc F_2 et F le sont.
On a donc $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ $\square$

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 3*. Cassini, 2014.